Irrationnalité de e et critère de transcendance

Développement pour les leçons 144 [1], 223 [2], 228 [3], 230 [4].

1 Introduction

On considère le nombre $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ (la série est bien définie). On considère aussi une suite (u_n) d'entiers de $[0, 9]$ strictement positive à partir d'un certain rang et on considère $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{10^{n!}}$. L'objectif de ce développement est de :

1. Montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que s est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est pas racine d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$.

La preuve du premier est directe. Pour la seconde, on établira une condition suffisante de transcendance.

2 Développement

<u>1- Irrationnalité de e :</u> On raisonne par l'absurde et on suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \geq 0$ et $p \wedge q = 1$. On a alors

$$q!p = q!qe = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!q}{k!} + q \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!}$$

et on note ε_q la deuxième somme. Il est clair que $\varepsilon_q \in \mathbb{N}$. On va maintenant montrer que $0 < \varepsilon_q < 1$. On a bien d'une part que $\varepsilon_q > 0$. Dans l'autre sens, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_q &= q \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{q!}{k!} \\
&< q!q \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{(q+1)^k} \\
&= \frac{q!q}{(q+1)^{q+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} \\
&< \frac{q}{q+1} \frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

et on obtient ainsi notre absurdité.

<u>2- Transcendance des nombres de Liouville :</u> On va tout d'abord montrer un lemme préliminaire. On considère $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $m \geq 1$ et soit x une racine réelle de P. On va montrer qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $\frac{a}{b} \in [x-1, x+1]$ vérifiant $P\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$, on a

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{K}{|b|^m}$$

En effet, on a P' qui est borné sur $I = [x-1, x+1]$ donc par le théorème des accroissements finis, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| = \left|P\left(\frac{a}{b}\right) - P(x)\right| \leq M \left|x - \frac{a}{b}\right|$$

Or, si $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on a que $b^m P\left(\frac{a}{b}\right) = \sum_{k=0}^{m} a_k a^k b^{m-k} \in \mathbb{Z}$ et qui n'est pas nul par hypothèse, donc on en déduit que $\left|P\left(\frac{a}{b}\right)\right| \geq \frac{1}{b^m}$ et on obtient le résultat attendu en considérant $K = \frac{1}{M}$.

Appliquons ce que l'on vient de voir pour montrer que s est transcendant. On va d'abord montrer un résultat intermédiaire, à savoir que :

$$|x - s_n| \leq \frac{1}{10^{n!n}}$$

En effet, on a que

1. Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
2. Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
3. Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
4. Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

$$|x - s_n| = x - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u_k}{10^{k!}} \leq 9 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

Or, si $k \geq n+1$, on a $k! \geq n!k$ et donc $\frac{1}{10^{k!}} \leq \frac{1}{10^{n!k}} = \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^k$. On obtient donc

$$\begin{aligned} |x - s_n| \leq 9 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}} &\leq 9 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^k \\ &= 9 \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^{n!}}} \\ &= 9 \left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n} \frac{1}{10^{n!} - 1} \\ &\leq \frac{1}{10^{n!n}} \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu. On va pouvoir passer à la transcendance de s. Supposons par l'absurde que s est algébrique. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \neq 0$ de degré $m \geq 1$ tel que $P(s) = 0$. Soit $K > 0$ comme dans le lemme. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $s_n \in \mathbb{Q}$, que $s_n \neq s$ et que (s_n) converge vers s. Ainsi, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait que $s_n \in [s-1, s+1]$ et $P(s_n) \neq 0$. Ainsi, on a pour tout $n \geq n_0$ que $|x - s_n| \geq \frac{K}{10^{n!m}}$ par le lemme (le dénominateur de s_n étant $10^{n!}$). On obtient donc

$$\frac{K}{10^{n!m}} \geq \frac{1}{10^{n!n}}$$

et donc $\frac{1}{K} \geq (10^{n!})^{n-m}$ qui tend vers $+\infty$, ce qui n'est pas possible. Donc s n'est pas algébrique.

3 Bibliographie

Le FGN, le analyse 1, les pages 25-27. Et ouais !